SESSION 1991

Mathématiques Problème

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

E désigne l'espace vectoriel des polynômes d'une variable à coefficients réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $e_n(x) = x^n$.
On rappelle que tout élément de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des polynômes (e_n).
Si f est une fonction d'une variable réelle, les notations f', f", $f^{(k)}$... désignent les dérivées successives de f.

I

1) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $I(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt$.

Justifier la convergence de I(n).
Etablir une relation entre I(n) et I(n-1).
En déduire la valeur de I(n).

2) Soit l'équation différentielle :

(1) $$(1-x)y' - \lambda y = 0$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x et λ un réel donné.

a) Déterminer les solutions de (1) sur l'intervalle $]-1,1[$.

b) Pour quelle valeur de λ les solutions ainsi définies sont-elles des polynômes de degré n ? Ces polynômes sont-ils alors solutions sur $\mathbb{R}$?

II

On définit l'application $\mathcal{L}$: $P \longmapsto \mathcal{L}(P)$ par la relation :

(2) $$\mathcal{L}(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(xt) \, dt .$$

1) Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer $\mathcal{L}(e_n)$ pour tout n.
Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$.

3) Soit $Q \in E$, $Q = \sum_{i=0}^{q} a_i e_i$. Résoudre l'équation

$$\mathcal{L}(P) = Q$$

où P est un élément inconnu de E.

A SUIVRE

4) Soit $P \in E$. Comparer les polynômes :

a) $e_1 \mathcal{L}(P)'$ et $\mathcal{L}(e_1 P')$, et plus généralement $e_k \mathcal{L}(P)^{(k)}$ et $\mathcal{L}(e_k P^{(k)})$,

b) $\mathcal{L}((e_1 P')')$ et $\mathcal{L}(P)'$.

(On pourra commencer par étudier le cas $P = e_n$).

III

On définit l'application $\mathcal{D}$: $P \longmapsto \mathcal{D}(P)$ par la relation :

(3) $$\mathcal{D}(P)(x) = x\,P''(x) + (1-x)\,P'(x) \ .$$

1) Montrer que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme de E.

2) λ étant un nombre réel donné, on considère l'équation

(4) $$\mathcal{D}(P) = \lambda\,P$$

où P est un élément inconnu de E.

a) Montrer que si P est une solution de (4), $\mathcal{L}(P)$ est une solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

b) Pour quelles valeurs de λ, (4) a-t-elle des solutions dans E ?

3) a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme L_n vérifiant les deux conditions :

(5) $$\begin{cases} \mathcal{D}(L_n) + n\,L_n = 0 \\ L_n(0) = 1 \end{cases}$$

Préciser les expressions de $\mathcal{L}(L_n)$ et de L_n .

b) Montrer que

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,(e^{-x}x^n)^{(n)} \ .$$

4) Donner les valeurs propres de $\mathcal{D}$ ainsi que ses sous-espaces propres en précisant leur dimension.

Tournez la page S.V.P.

IV

On définit l'application : $(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)\, Q(t)\, dt$.

1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2) a) Soit $P \in E$. Calculer la dérivée de la fonction :

$$x \longmapsto x\, e^{-x} P'(x) .$$

En déduire une nouvelle expression de $\mathcal{D}(P)(x)$.

b) Montrer que pour $P,Q \in E$, on a :

$$\langle \mathcal{D}(P), Q\rangle = \langle P, \mathcal{D}(Q)\rangle .$$

c) Quelle est la valeur de $\langle L_p , L_q\rangle$ pour $p \neq q$?

3) Calculer $\langle L_n , L_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V

On considère l'équation : (6) $\mathcal{D}(P) = Q$

où Q est un polynôme donné de E et P un élément inconnu de E.

1) On suppose que : $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, Q(t)\, dt \neq 0$.

L'équation (6) a-t-elle des solutions ?

2) On suppose maintenant que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, Q(t)\, dt = 0 .$$

a) Montrer que si Q est de degré $\leqslant m$, il existe des réels α_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ tels que

$$Q = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, L_k .$$

b) Que peut-on alors dire des solutions de (6) ?

3) On choisit $Q = x^2 - 6x + 4$.
Déterminer alors les solutions de (6).

o **FIN** o

o